International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Portada de la Monografía

Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.			
Número de convocatoria del alumno			
Nombre y apellido(s) del alumno			
Nombre del colegio			
Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	Mayo	Año	2015

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: Matemáticas

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: Teoría de juegos cooperativos: Modelización matemática y resolución de poblemas.

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, la calificación asignada será cero.

Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: ____________ Fecha: 3/03/2015

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]: ______________________

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, la calificación asignada será cero.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

Como se indica en la sección "Responsabilidades del supervisor" de la guía de la Monografía, se recomienda dedicar entre tres y cinco horas a cada alumno. Se contactará a los colegios cuando el número de horas dedicadas se deje en blanco, o cuando se indiquen cero horas y no se incluya una justificación. También se contactará a los colegios en caso de que el número de horas dedicadas sea excesivo en comparación con la cantidad de tiempo recomendada.

He dedicado $\boxed{5}$ horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: ______________________ Fecha: 4/03/2015

Formulario de evaluación (para uso exclusivo del examinador)

Número de convocatoria del alumno		

		Nivel de logro			
Criterios de evaluación	Examinador 1	Máximo	Examinador 2	Máximo	Examinador 3
A Formulación del problema de investigación	2	2		2	
B Introducción	1	2		2	
C Investigación	2	4		4	
D Conocimiento y comprensión del tema	1	4		4	
E Argumento razonado	1	4		4	
F Aplicación de habilidades de análisis y evaluación apropiadas para la asignatura	2	4		4	
G Uso de un lenguaje apropiado para la asignatura	3	4		4	
H Conclusión	1	2		2	
I Presentación formal	1	4		4	
J Resumen	2	2		2	
K Valoración global	1	4		4	
Total (máximo 36)	17				

Nombre del examinador 1: ____________ Número de examinador: ____________
[MAYÚSCULAS]

Nombre del examinador 2: ____________ Número de examinador: ____________
[MAYÚSCULAS]

Nombre del examinador 3: ____________ Número de examinador: ____________
[MAYÚSCULAS]

Para uso exclusivo del centro de evaluación del IB: B: ________

Para uso exclusivo del centro de evaluación del IB: A: ________

TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS: MODELIZACIÓN MÁTEMATICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- De no ser por la portada no se sabría a quien
pertenece esta monografía, luego falta esa portada del
trabajo! Además no hay ni una buena referencia bibliográfica.
Esto afecta seriamente el criterio de presentación formal.

- Las definiciones hasta la página 7 pudieron ser
redactadas de mejor manera, incluso usando los ejemplos 1 y 2.

- Se evidencia una gran recopilación de definiciones,
algunas de ellas incluso sin usar (9.2, 9.3), por
Además en las demostraciones se ~~las~~ obtienen resultados
de los que no se evidencian ciertos procesos o pasos omitidos
que a su vez no permiten concluir comprensión de
parte del candidato.

1. Resumen

Las Matemáticas tienen numerosas utilidades teóricas en diferentes áreas como la Química o la Física. En esta monografía pretendo estudiar la utilidad práctica de las Matemáticas en situaciones reales mediante una rama de ésta de reciente creación y aún en desarrollo, la Teoría de Juegos y dentro de ella la Teoría de Juegos Cooperativos.

Para ello dividiré la investigación en tres partes diferenciadas. Una primera parte donde me centraré en explicar los conceptos esenciales de esta área, así como mostrar los tipos de problemas de los que se encarga y haré una clasificación de ellos. Seguidamente expondré sobre lo que se conoce como conceptos de solución de estos problemas y en qué axiomas se basa cada uno para proponer una solución sustancialmente diferente a un mismo problema o situación. Por último, y aunque realizaré pequeños ejemplos a lo largo de las dos partes anteriores, expondré dos problemas prácticos y propondré un modelo de juego para resolverlos con la teoría previamente desarrollada, intentando demostrar así la enorme utilidad de la teoría de juegos en la actualidad. Un problema tratará sobre el reparto de beneficios entre empresas y otro sobre una votación en un parlamento.

Para finalizar la investigación he realizado unas conclusiones relevantes respecto del tema tratado, en las que evalúo el uso de la teoría de juegos en variadas áreas de la actualidad así como posibles ampliaciones que se podrían realizar en relación al tema de la monografía pero que son más complejos o son imposibles de abarcar en esta monografía.

El trabajo por tanto, es una modelización matemática de situaciones de la vida real, de forma que al analizarlas matemáticamente podamos obtener un resultado que nos aconseje a la hora de tomar una decisión final.

El resumen contiene los elementos requeridos con claridad

Número de palabras: 286

Índice

"Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione."

John Von Neumann

2. *Introducción*

La teoría de juegos es un área para mi interesante, ya que trata de matematizar, por así decirlo, mediante modelos el comportamiento humano en situaciones concretas. Desde qué hacer en una guerra, hasta el simple reparto de los beneficios de un trabajo entre las personas que han participado en él. Como vamos a ver, es una rama relativamente nueva y que aún así es una de las más valoradas académicamente, lo cual llama mucho mi atención. Eso me lleva a plantearme por qué es así y si realmente resulta tan útil aplicar conceptos matemáticos a lo que al fin y al cabo son situaciones de la vida real. Por lo que me decido a investigar sobre el tema y descubro un amplio campo de información. Decido centrarme en la teoría de juegos cooperativos, reduciendo así el tema y concretándolo de forma que el análisis sea más abarcable. Con la realización de la monografía pretendo demostrar la utilidad de la teoría de juegos cooperativos en problemas reales y que son de gran importancia como, por ejemplo, el poder de determinado partido político en un parlamento.

Tercero B | hasta aquí

Antes de desarrollar el contenido estrictamente matemático, pienso que es conveniente hacer un repaso a la historia de esta rama de las Matemáticas. Se puede decir que es un área bastante joven, en comparación con la mayoría, ya que esta nace en el siglo XIX con los economistas Cournot y Edgeworth. Y no se establecen sus principios básicos hasta el siglo XX con la publicación de "The Theory of Games and Economic Behavior" de John Von Neumann en 1944 con la colaboración del economista Oskar Morgenstern durante la estancia de ambos en Princeton.

Más tarde, ya en los años cincuenta John Nash publicó sus primeros trabajos sobre el equilibrio de Nash y en general sobre Teoría de equilibrios, y que juega ahora un papel muy importante en desarrollo de ciencias sociales y, en concreto, en Economía.

En los sesenta otros matemáticos como Selten(1965) o Harsanyi(1967) desarrollaron los conceptos que permitieron la aplicación exitosa de la Teoría de Juegos en otras disciplinas. Además la teoría de juegos ha sido premiada y valorada académicamente tras la obtención del premio Nobel de economía por parte de algunos de sus creadores e impulsores como Nash o Selten. Estos premios avalan la teoría de juegos como la principal herramienta de las Matemáticas para analizar las interacciones sociales.

3. *Juegos cooperativos*

3.1 Definición y conceptos básicos

En este primer apartado, voy a realizar una introducción básica a la teoría de juegos cooperativos. Explicaré los conceptos básicos que debemos conocer para estudiar problemas y los distintos tipos posibles de estos a los que nos podemos enfrentar, así como sus posibles soluciones.

La *teoría de juegos* es la teoría matemática que estudia la toma de decisiones interactivas en determinadas situaciones, llamadas juegos, con las siguientes características:

- Hay un grupo de agentes.
- Cada agente toma una decisión.
- El resultado final viene determinado por las decisiones de cada agente. ✓
- Cada agente puede tomar diferentes decisiones en función de los posibles resultados.

En la teoría de juegos cooperativos, se asume que estos agentes pueden tomar decisiones conjuntas, formando subgrupos y repartiéndose el beneficio(o el coste) total del juego.

Los tipos de juegos que estudia entonces este área, son aquellos en los que los agentes pueden llegar a acuerdos entre ellos, llamados juegos de forma coalicional o de utilidad transferible.

Definición 1: Un juego de *utilidad transferible (TU),* se denota por $G(J, v)$, siendo:

- $J = \{1,2,3, \dots, n\}$.Un conjunto finito de jugadores.
- Una función característica v que asocia a cada subconjunto S de J (llamado coalición), un número real $v(S)$ (llamado valor de coalición), siendo $v(\emptyset) = 0$.

cantidad de posibles coaliciones, dependiendo?, ¿conjunto potencia?

Representaremos las coaliciones posibles de un juego como $2^J = \{\emptyset, S_1, \dots, S_i\}$.

El significado de $v(S)$ puede ser muy diverso: el beneficio que se obtiene cooperando, el costo de un bien comunitario o el carácter ganador de la coalición.

Cada coalición del juego buscará una estrategia cooperativa óptima que le proporcione el mayor beneficio posible. Se llamarán pagos a la valoración que cada agente o coalición obtenga ($v(S)$) en función del resultado final y del cual dependerán sus beneficios o pérdidas.

Ejemplo 1: Tres personas quieren vender guantes de edición limitada a 600 euros. Uno de ellos solo tiene guantes de la mano izquierda y los otros dos solo de la mano derecha.

J $N = \{1,2,3\}$ izquierda, derecha, derecha

¿Explicarlo aquí?

$$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = v(2,3) = 0 \,;\, v(1,2) = v(1,3) = v(N) = 600$$

V. $2^?$

Ejemplo 2: Un anciano rico deja en herencia a sus tres hijos un millón de euros con la siguiente condición: al menos dos de ellos deben estar de acuerdo con el reparto.

$$N = \{1,2,3\} \text{ hijos}$$

$$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0 \, ; v(1,2) = v(2,3) = v(1,3) = v(N) = 1$$

acuerdo significa 1 millón.

3.2 Propiedades y operaciones de juegos

Definición 2: Si en un juego aumenta el número de jugadores que forman una coalición y el beneficio o ganancia de esta coalición no disminuye se trata de un juego cooperativo monótono.

- $G(J, v)$ es *monótono* si $\forall \, S, T \subset J$, con $S \subset T \Longrightarrow v(S) \leq v(T)$.

Definición 3: Un juego es superaditivo cuando dos coaliciones con intersección vacía se unen el beneficio de la nueva coalición es al menos igual a la suma de las ganancias de las coaliciones que se unen:

- $G(J, v)$ es *superaditivo* si $\forall \, S, T \subset J$, con $S \cap T = \emptyset \Longrightarrow v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.

En general se cumple que los juegos son monótonos y superaditivos.

Ejemplo 3: En el caso de que tuviéramos un juego de tres jugadores ($J = \{1,2,3\}$) sería superaditivo si se cumple que:

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) \leq v(\{1,2\}), \qquad v(\{1\}) + v(\{3\}) \leq v(\{1,3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{3\}) \leq v(\{2,3\}), \qquad v(\{1\}) + v(\{2,3\}) \leq v(\{1,2,3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{1,3\}) \leq v(\{1,2,3\}), \qquad v(\{3\}) + v(\{1,2\}) \leq v(\{1,2,3\})$$

Definición 4: Decimos que un juego es convexo si las dos coaliciones con intersección no necesariamente vacía se unen, entonces la suma de los beneficios de la unión e intersección es al menos igual a la suma de beneficios de las coaliciones que se unen:

- $G(J, v)$ es convexo si $\forall \, S, T \subset J$, se verifica que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

Todos estos conceptos en diferentes grados, determinan que a los jugadores les interesa formar la gran coalición J, esto es cooperar todos. Sin embargo, esta interpretación sólo es posible si v es un juego de beneficios.

Si interpretamos v como un juego de costos, las desigualdades deberían ser al contrario.

Definición 5: Se dice que un juego $G(J, v)$ es *0-normalizado* si se verifica que $v(\{i\}) = 0, \forall\, i \in J$.

Definición 6: Se dice que un juego $G(J, v)$ es *(0,1)-normalizado* si se verifica que $v(\{i\}) = 0, \forall\, i \in J$ y $v(J) = 1$.

El beneficio de la coalición individual es directamente asignado al jugador por lo que puede considerarse cero.

Por último definiré tres operaciones básicas en los juegos cooperativos:

Definición 7: Sean (J, v) y (J, w) dos juegos cooperativos, con $J = \{1,2, \dots, n\}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define:

- $(v + w)(S) = v(S) + w(S), \forall\, S \subset J$
- $(\lambda v)(S) = \lambda[v(S)], \forall\, S \subset J$
- $(v \cdot w)(S) = v(S) \cdot v(w), \forall\, S \subset J$

3.3 Juegos simples

Un juego simple es aquel donde se quiere determinar mediante la función característica la capacidad de una coalición de ser ganadora o no en la toma de una decisión.

Definición 8: Denominaremos juego simple a (J, W) donde $W \subset 2^J$ es un subconjunto de conjuntos de J. Un conjunto perteneciente a W se denomina *coalición ganadora*. En un juego simple, los acuerdos se alcanzan cuando estos los apoya la coalición ganadora. Por tanto un juego simple cumplirá que:

$$W \neq \emptyset; W \subset 2^J \text{ ; Si } S \in W \text{ y } S \subset T, \text{ entonces } T \in W.$$

Pero $\emptyset \in 2^J$ también!

Podemos representar entonces un juego simple *(J,W)* como un juego de TU *(J,v)* tal que

$$v(S) = \begin{cases} 1 \; si \; S \in W \\ 0 \; si \; S \notin W \end{cases}$$

un ejemplo podría clarificar cada uno esto

Un juego simple expresado como un juego TU siempre será monótono. Y por tanto si un juego TU es monótono y, además, $v(J) = 1$ y $v(S) \in \{0,1\}$ para todo $S \subset J$, entonces es equivalente a un juego simple *(J,W)* donde

$$W = \{S \subset J \;/\; v(S) = 1\}$$

Definición 9.1: Una *coalición ganadora minimal* S, será aquella en la que $S \in W$ si no contiene en ella a otra coalición ganadora; es decir, si $T \notin W \Longrightarrow v(T) = 0\; \forall T \subsetneq S$.

sin dar ejemplo de esta noción

Definición 9.2: Un jugador $i \in J$ es *dictador* si $S \in W \Leftrightarrow i \in S$.

Definición 9.3: Un jugador $i \in J$ es *veto* si $S \in W \Rightarrow i \in S$.

Denotaremos por W^m al conjunto de coaliciones ganadoras minimales, de forma que

$$W^m = \{S \in W \ / \ T \notin W \ si \ T \subsetneq S\}$$

Escribiremos como $\mu_i(v)$ el conjunto de cambios del jugador $i \in J$. Es decir el número de coaliciones para las cuales un jugador i es decisivo.

Definición 10: Llamamos juego de votación ponderada a un juego (0,1)-normalizado, ya que solo caben dos posibilidades ganar(1) o perder(0) la votación.

Definiciones que requieren de mayor explicación luego de exhibirlas

Este es uno de los problemas más comunes en los que se aplica la teoría de juegos de forma muy eficaz.

En el juego de J jugadores, cada jugador $i \in J$, posee un número de votos $\omega_i > 0$. Representamos un juego de votación ponderada como $G(J, q)$. Donde q es el mínimo valor que hace ganar la votación.

Para una coalición, los votos serán la suma de los votos de los agentes participantes:

$$\omega(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$$

Dada un mínimo de votos q para ganar la votación:

$$v(S) = 1 \Leftrightarrow \omega(S) \geq q$$

y

$$v(S) = 0 \Leftrightarrow \omega(S) < q.$$

Ejemplo 4: Los resultados tras las elecciones para el parlamento de Aragón en el año 1991 fueron los siguientes: el PSOE obtuvo 30 escaños, el PP 17 al igual que el PAR(Partido Regionalista de Aragón) e IU obtuvo 3 escaños.

Podemos representar esta situación como un juego (J, q), donde $J = \{1,2,3,4\}$ (1=PSOE, 2=PP, 3=PAR, 4=IU). Además conocemos que el mínimo de escaños necesario para gobernar con mayoría absoluta $q = 34$. ← especificar que es más del 50% del total de escaños.

Por otro lado tenemos que $\omega(\emptyset) = 0, \omega(1) = 30, \omega(2) = 17, \omega(3) = 17, \omega(4) = 3 < q$. El conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.

o que pueden tener mayoría absoluta!

Porque $\{1,2,3\}$ $\{2,3,4\}$ $\{1,2,4\}$ no pasan a ser W^m?

Falta esta explicación

4. Conceptos de solución

Una vez vistos los problemas a los que nos podemos enfrentar, voy a explicar como podemos resolverlos y qué criterios podemos escoger para ello, ya que según el razonamiento por el que optemos, un juego tendrá unas soluciones u otras. Podemos usar soluciones sencillas y aparentes o soluciones más complejas pero con propiedades más útiles e igualmente razonables de forma que obtendremos mejores resultados.

4.1 Preimputaciones e imputaciones

Como he dicho al principio la finalidad de la teoría de juegos trata de hacer reparto de los beneficios o ganancias entre los agentes o coaliciones de un juego.

Por tanto si tenemos un juego $G(J, v)$ en forma coalicional donde $J = \{1,2,3, \ldots, n\}$. Nuestro objetivo consiste en decidir como repartir este valor $v(J)$ entre los n agentes. Para observar el conjunto de esos valores para cada jugador o coalición se utilizan las preimputaciones que representan un vector de distribución de pagos.

¿Qué es esto?

¿Qué denota $x(J)$?

Para cualquier coalición $S \subset J$ tenemos que:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

y por ello

$$x(J) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Donde x_i representa el pago de cada jugador $i = 1,2,3, \ldots, n$.

Definición 11: El *conjunto de preimputaciones* de un juego $G(J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de distribución de pagos:

$$PI(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} / \; x(J) = v(J)\}$$

Se define también que:

$$x(\emptyset) = 0$$

El siguiente razonamiento es simple, ningún agente va a aceptar un pago inferior al que obtendría él solo sin formar ninguna coalición, por ello surge el concepto de las *imputaciones*.

$$x(J) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(J) \; \textit{Principio de eficiencia}$$

Definición 12: El conjunto de imputaciones de un juego $G = (J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pago, pertenecientes al conjunto de preimputaciones:

$$I(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(J,v) \colon x_i \geq v(\{i\}), \forall\, i = 1,2,\dots,n\} =$$

$$= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \colon x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}), \forall\, i = 1,2,\dots,n\}$$

Esta condición por la cual para cada jugador i ha de cumplirse que $x_i \geq v(\{i\})$ se conoce como *Principio de racionalidad individual.*

Ejemplo 5: En un ejemplo de un juego 0-normalizado de tres jugadores donde $v(J) = 8$ y $v(1) = v(2) = v(3) = v(\emptyset) = 0$ el conjunto de imputaciones sería:

Los ejemplos
definiciones
anteriores

$$I(J,v) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 8, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Si se quiere representar gráficamente, sería la región formada por un triángulo de vértices (8,0,0), (0,8,0), (0,0,8) en un espacio de tres dimensiones.

Definición 12.1: Si en un juego se da que $I(J,v) \neq \emptyset$, se dice que es un *juego esencial.*

Ejemplo 7.

4.2 Core y propiedades

Si extendemos el principio de racionalidad individual a todas las coaliciones posibles de un juego, principio de racionalidad coalicional, se obtiene el *core*:

Definición 13: El core de un juego $G(J,v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I(J,v) \in \mathbb{R} \colon x(J) = v(J), x(S) \geq v(S), \forall\, S \in P(J)\}$$

Lo primero que se observa del core es que se trata de un subconjunto de las imputaciones. Además se trata de los posibles vectores de pagos que podrían formar acuerdos de distribución estables entre los jugadores, ya que ninguna coalición o jugador podría conseguir de otra manera mas beneficios.

Teorema 1: Sea un juego $G(J,v)$ un juego cooperativo. El conjunto $C(J,v)$ es cerrado, acotado y convexo:

Demostración

$$C(J,v) = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \colon \sum_{i=1}^{n} x_i = v(J), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), para\ todo\ S \in P(J)\right\}$$

Las restricciones que definen al core son de tipo igual, o mayor o igual, lo cual implica que el conjunto sea cerrado.

Veamos que $C(J,v)$ es un conjunto acotado:

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(J, v)$. Se cumple que $x_i \geq v(\{i\})$ para cada $i = 1,2, \dots, n$.

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j \neq i} x_j = v(J) - \sum_{j \neq i} x_j \leq v(J) - v(J - \{i\})$$

Por ello se verifica que:

$$v(\{i\}) \leq x_i \leq v(J) - v(J - \{i\})$$

Y por tanto $C(J, v)$ está acotado.

→ hasta aquí de nuevo la definición dada en la página 6!

Por último se demuestra que el conjunto del core también es convexo:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(J, v), x = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C(J, v), \lambda \in [0,1]$$

Veamos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C(J, v)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, (\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, \dots, (\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n) \end{aligned}$$

se tiene que:

$$[\lambda x + (1 - \lambda)y(J)] = \sum_{i=1}^{n} [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda v(J) + (1 - \lambda)v(J) = v(J)$$

Para cada coalición S:

$$[x + (1 - \lambda)y(S)] = \sum_{i \in S} [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] = \lambda \sum_{i \in S} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in S} y_i \geq \lambda v(S) + (1 - \lambda)v(S) = v(S)$$

Por tanto, $C(J, v)$ es convexo y la proposición queda demostrada.

No es en la que la def. en página 6 se cumple

Pero claro al ser un conjunto acotado, convexo y cerrado no todos los juegos tendrán un core, y por tanto no siempre podremos utilizar este conjunto de vectores de pago como solución a un juego. Para conocer el tipo de juegos que posee siempre un core debo definir antes los siguientes conceptos.

Una familia $F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de J, distintos y no vacíos es *equilibrada* para J si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, denominados pesos, tales que para todo $i = 1,2, \dots, n$ verifican:

$$\sum_{j:i \in S_j}^{m} \alpha_j = 1$$

Definición 14: Se dice que el juego $G(J, v)$ es *equilibrado* si para cualquier familia equilibrada $\{S_1, \dots, S_m\}$ sobre J, con pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(J)$$

Teorema 2: Un juego $G(J, v) \neq \emptyset$ tiene core $\Leftrightarrow G(J, v)$ es un juego equilibrado.

¿Quién le permite hacer esto?

Demostración:

Sea F una familia equilibrada. Por hipótesis sabemos que existe $x \in G(J, v)$. Entonces:

$$\sum_{S_j \in F} \alpha_j v(S_j) \boxed{\leq \sum_{S_j \in F} \alpha_j \sum_{i \in S} x_i = \sum_{S_j \in F} \sum_{i \in S} \alpha_j x_i} = \sum_{i \in J} \sum_{S \in F: i \in S} \alpha_j x_i = \sum_{i \in J} x_i = v(J)$$

Y por tanto (J, v) es un juego equilibrado.

Si suponemos ahora que $C(J, v) = \emptyset$, el juego nunca es equilibrado y por tanto existirá una familia equilibrada de coaliciones $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ con pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tal que:

$$\sum_{S \in F} \alpha_j v(S_j) > v(J)$$

Nada clara la explicación (inexistente).

4.3 Valor de Shapley

El valor de Shapley es un concepto de solución para juegos cooperativos que busca vectores de pago que cumplan unos determinados razonamientos o criterios diferentes al core o las imputaciones y que resultan ser fácilmente razonables para personas que no poseen conocimientos matemáticos profundos. Por ello es la más utilizada para resolver juegos.

El valor de Shapley consta de 4 axiomas o supuestos que nos llevan a una solución y una única asignación entre los jugadores.

Si se tiene un juego $G(J, v)$ en forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Se consideran los siguientes vectores de pago para los n jugadores:

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v)) \in \mathbb{R}$$

Esta función de pagos $\phi(v)$ debe cumplir lo siguiente:

- *Eficiencia*. La función $\phi(v)$ debe distribuir todo el pago total del juego:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(J)$$

- *Simetría.* Para cada par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para una coalición tales que cumplan que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \in J, \text{con } i,j \notin S$$

debe ser

$$\phi_i(v) = \phi_j(v)$$

- *Dummy.* Si un jugador no aporta ninguna ganancia adicional al resto de los jugadores no recibe ningún pago adicional. Es decir, un jugador $i \in J$ es dummy si se cumple que:

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), para\ toda\ coalición\ S\ con\ i \in S$$

debe ser

$$\phi_i(v) = v(\{i\})$$

- *Linealidad.* La función de asignación ϕ siempre se puede expresar como la combinación lineal de varios juegos simples:

$$\phi_i(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \phi_i(v_1) + \lambda_2 \phi_i(v_2)$$

Teorema 3: La única asignación que garantiza la verificación de los 4 axiomas es:

$$\phi_i = \sum_{S \in 2^J} q(s)[v(S) - v(S \setminus \{i\})]\ donde\ q(s) = \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}$$

Siendo $s = |S|$ el número de jugadores de la coalición S.

Demostración:

Sea un juego simple $G(J, v)$ con $S \subseteq J$ y $S \neq \emptyset$ y un juego $G(J, v')$. Por la propiedad de linealidad sabemos que:

$$\phi_i(v') = \sum \lambda_s \phi_i(v)$$

Además

$$v(T) = \begin{cases} 1, T \supseteq S \\ 0, T \not\supseteq S \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos que el jugador i es dummy para $G(J, v)$. Si $i \notin S$, entonces:

$$v(T) - v(T \setminus i) = v(\{i\}) \text{ siendo } i \in T$$

$$v(\{i\}) = 1 - 1 = 0 \text{ si } S \subseteq T \text{ y } v(\{i\}) = 0 - 0 = 0 \text{ si } S \nsubseteq T$$

Si $i \in S$ y $T \subseteq J - \{i, j\}$, entonces:

$$\left.\begin{matrix} v(T \cup i) = 0 \\ v(T \cup j) = 0 \end{matrix}\right\} \to \phi_i(v) = \phi_j(v) = 0 = v(\{i\})$$

Demostrando así que (J, v') cumple los cuatro axiomas anteriores de simetría, linealidad, jugador dummy y finalmente de eficiencia; ya que $S \subseteq J$ y por tanto se cumplirá que:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v') = v'(J)$$

Ahora queremos demostrar la unicidad del valor de Shapley, es decir que $\exists k, \forall i \in S, \phi_i(v) = k$.

De forma que

$$\sum_{i \in J} \phi_i(v) = \sum_{i \in S} \phi_i(v) + \sum_{i \notin S} \phi_i(v) = v(J) = 1 = k|S| \to k = \frac{1}{|S|}$$

Pero no cualquier dato!

Y de esta manera nuestra proposición queda demostrada. Por lo general valor de Shapley es muy usado gracias a estas cuatro propiedades que cumple, sin embargo a veces el valor de Shapley no se encuentra en el core y esto puede hacer que rechacemos esta solución ya que no se cumple el principio de racionalidad coalicional.

Ejemplo 6: Por ejemplo el valor de Shapley para un juego $G(J, v)$ de $n = 3$ jugadores sería:

$$J = \{1,2,3\} \to 2^J = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Las familias de coaliciones de los jugadores serían:

$$S(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}\,; S(2) = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\,;$$
$$S(3) = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Entonces

$$q(S) = \frac{(s-1)!\,(3-s)!}{3!}$$

Y por tanto

$$q(1) = \frac{0!\,2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$q(2) = \frac{1!\,1!}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$q(3) = \frac{2!\,0!}{3!} = \frac{1}{3}$$

El valor de Shapley que obtenemos en este caso es:

$\phi_1(v) = q(1)[v(1) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] = \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})]$

$\phi_2(v) = q(1)[v(2) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})]$

$\phi_3(v) = q(1)[v(3) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] = \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})]$ ✓

Se observa como los coeficientes deben sumar siempre 1, en este caso son 1/3, 1/6, 1/6 y 1/3.

4.4 Índices de poder

Los juegos simples y de votación ponderada definidos anteriormente se aplican generalmente a la politología. Para ellos existe un concepto de solución diferente conocido como índice de poder. Estos problemas suelen usarse como modelos de problemas de votación o para medir el poder de los diferentes miembros de un comité, los grupos políticos en un parlamento por ejemplo. En este contexto el índice de poder puede ser considerado como la mayor o menor capacidad de un miembro de repercutir en el resultado final de la votación.

4.4.1 Índice de poder de Shapley-Shubik

Definición 15: Si tenemos un juego simple $G(J, W)$, definiremos el índice de Shapley-Shubik como

$$\mathfrak{I}_i(J, W) = \sum_{S \in W^i} \frac{(|S| - 1)!\,(|J| - |S|)!}{|J|!}$$

para todo $i \in J$. Podemos interpretar este índice como la probabilidad de que la colación $S \subset J$ tomada al azar sea un cambio para el jugador i. Recordemos que el conjunto de cambios de un jugador i es el número de coaliciones para las que el jugador i es decisivo.

4.4.2 Índice de poder de Banzhaf

Para otorgar un índice de poder a cada agente del juego, el *índice bruto de Banzhaf* utiliza el concepto definido anteriormente del conjunto de cambios, que denominaremos *swing* en este apartado. Es decir que si tenemos dos coaliciones

$S, S \cup \{i\}$ en las que $\{i\} \notin S$, donde S es una coalición perdedora y $S \cup \{i\}$ es una coalición ganadora. Se dice que la coalición $S \cup \{i\}$ es un swing para el jugador $\{i\}$.

Definición 16: Si tenemos que $v \in G(J,q)$ e $\{i\} \in J$. Un swing para el jugador $\{i\}$ es una coalición $S \subset J \setminus \{i\}$ tal que $S \notin W$ y $S \cup \{i\} \in W$.

Escribiremos como $\mu_i(v)$ el número de swings del jugador $\{i\}$ y $\bar{\mu}(v)$ como el número total de swings de un juego. De manera que $\bar{\mu}(v) = \sum_{i \in J} \mu_i(v)$.

Definición 17: Definimos entonces el *índice crudo de Banzhaf* como el cociente entre el número de swings de un jugador entre el número total de swings posibles:

$$\beta_i(v) = \frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)}$$

Definición 18: Para cada $v \in G(J,q)$ e $\{i\} \in J$, existe un *índice de Banzhaf* tal que:

$$Bz_i(v) = \frac{\mu_i(v)}{2^{|J|}}$$

Se dice que para cada coalición $S \subset J \setminus \{i\}$, i es un pivote de S si S es un swing para i. $Bz_i(v)$ representa la probabilidad de que un jugador i sea pivote de una coalición $S \subset J \setminus \{i\}$ escogida al azar. Por ello es más representativo que la normalización anterior que simplemente mide la posibilidad de que el jugador i tenga más swings que otro jugador.

Aunque los tres índices representen más o menos lo mismo, sus pequeñas diferencias son importantes, ya que estos matices cambian el significado de los índices en un juego. La diferencia entre el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf es que este último, al contrario que el primero supone equiprobables todas las coaliciones. Mientras que Shapley-Shubik da una ventaja relativa a las coaliciones mayores respecto de las menores.

Si comparamos ambos índices de Banzhaf, como he dicho el índice de Banzhaf suele ser más utilizado porque aunque pierda la normalización y por tanto la eficiencia(la suma total no tiene por que ser 1), nos proporciona una visión más clara de la facilidad de un jugador/coalición para llegar a acuerdos en cada juego.

5. Resolución de juegos

Para terminar, en este apartado voy a resolver dos problemas diferentes, uno de beneficios y otro de votación. Así podremos observar y demostrar como queremos la utilidad de la teoría de juegos en numerosas áreas y situaciones donde aplicando métodos matemáticos podemos conseguir tomar mejor las decisiones.

Ejemplo 7: Para elaborar un barril de cerveza rubia hacen falta 4kg de lúpulo y 6kg de cebada y su precio es de 68 euros. Para uno de cerveza negra hace falta 5kg de significado?

lúpulo y 2kg de cebada, vendiéndose a 52 euros. Tres cervecerías tienen los siguientes recursos de lúpulo y cebada respectivamente: (4,33), (6,39), (60,0). Si denotamos $y_1 \geq 0 \equiv$ barriles rubia; $y_2 \geq 0 \equiv$ barriles negra.

Podemos definir ahora un juego TU (J, v) tal que:

$$J = \{1,2,3\}$$

Para calcular los valores de la función v resolvemos en cada caso un problema de programación lineal. En todos los casos hay que maximizar la función $F(x,y) = 68y_1 + 52y_2$. Las restricciones nos la da la cantidad de lúpulo y cebada que tenemos en cada caso.

Por ejemplo para calcular $v(J)$ el problema queda de la siguiente forma:

Máx. $F(x,y) = 68y_1 + 52y_2$ sujeto a:

$$4y_1 + 5y_2 \leq 70$$

$$6y_1 + 2y_2 \leq 72$$

Obteniendo como solución: $y_1 = 10$; $y_2 = 6$,

Por tanto $v(J) = 68 \cdot 10 + 52 \cdot 6 = 992$. El resto de los valores se obtienen de forma análoga, pudiendo resultar valores no enteros.

$$v(\emptyset) = 0, v(1) = 68, v(2) = 102, v(3) = 0$$

$$v(1,2) = 170, v(1,3) = 710, v(2,3) = 762, v(J) = 992$$

Una vez establecido el juego vamos a calcular las imputaciones, el core y el valor de Shapley para este juego.

Imputaciones

$$I(J,v) = \{x \in \mathbb{R}: x = x_1 + x_2 + x_3 = 992, x_1 \geq 68, x_2 \geq 102, x_3 \geq 0\}$$

$$C(J,v) = \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 170,\ x_1 + x_3 \geq 710, x_2 + x_3 \geq 762 \\ x \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 992 \\ x_1 \geq 68, x_2 \geq 102, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

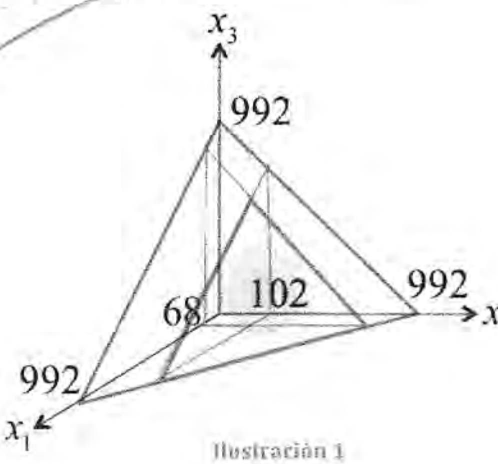

Ilustración 1

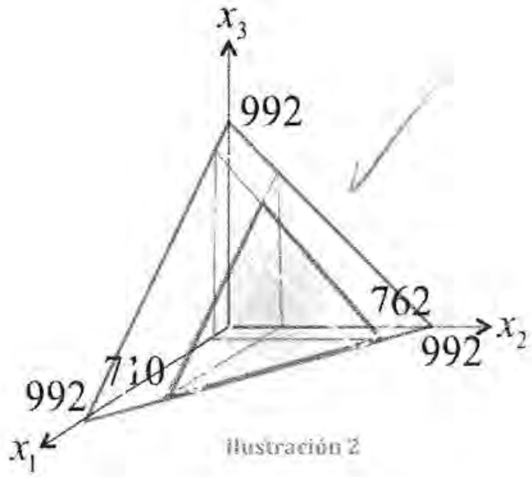

Ilustración 2

En este caso tenemos tres jugadores, por tanto su valor de Shapley será tal y como vimos en el ejemplo 6, de manera que:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\ &+ \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ &= \frac{1}{3}\cdot 68 + \frac{1}{6}[170 - 102] + \frac{1}{6}[710 - 0] + \frac{1}{3}[992 - 762] = 190.6\end{aligned}$$

ϕ_2 y ϕ_3 se calculan con el mismo procedimiento, obteniéndose:

$$\phi(J, v) = (190.6, 273.6, 527.6) \in C(J, v)$$

De forma que si las tres cervecerias colaboraran juntas obtendrían estos beneficios.

Ejemplo 8: El parlamento de "Amigolandia" posee 93 escaños y se aprueban las leyes con 47 votos. En las últimas elecciones se dieron estos resultados: P.Liberal (35 escaños), P.Democrático (28 escaños), U.Federalista (12 escaños), L.Central (11 escaños) y P.Progresista (7 escaños).

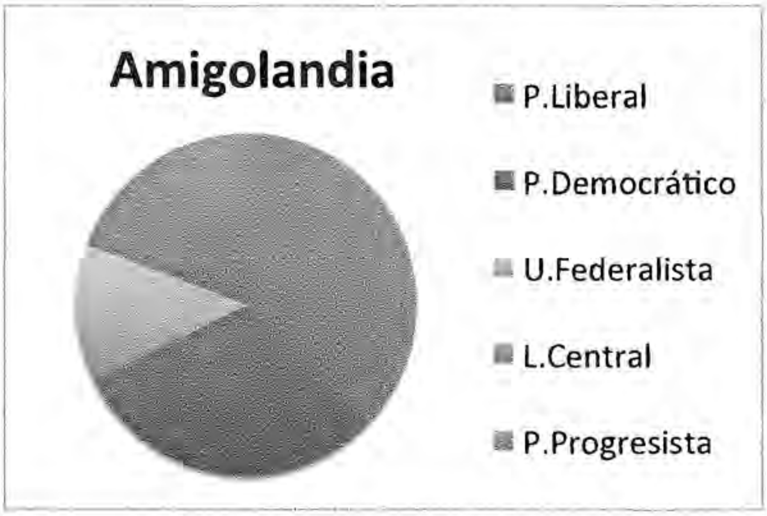

Ilustración 3

Definimos entonces un juego de votación ponderada *(J,q)* de forma que

$$J = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\omega(S) = (35,28,12,11,7)$$

$$v(S) = \begin{cases} 1, \sum_{i \in S} \omega_i \geq 47 \\ 0, \sum_{i \in S} \omega_i \geq 47 \end{cases}$$

Calculamos ahora el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf obteniendo estos resultados:

$$\Im(J, v) = (0.4, 0.23, 0.23, 0.06, 0.06)$$

$$\mu_i(J, v) = (3,3,3,2,2) \rightarrow \bar{\mu}(v) = 13$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_1(v)}{\bar{\mu}(v)} = \frac{3}{13} = 0.23 \; ; \; Bz_1 = \frac{\mu_1(v)}{2^J} = \frac{3}{32} = 0.094$$

El resto de valores para los otros jugadores se calculan mediante el mismo proceso.

$$\beta_i(J, v) = (0.23, 0.23, 0.23, 0.15, 0.15)$$

$$Bz_i(J, v) = (0.094, 0.094, 0.094, 0.063, 0.063)$$

Con estos datos los índices de poder obtenidos son estos, sin embargo que pasaría si introducimos las relaciones entre los partidos como un nuevo dato. Los resultados finales van a cambiar de la forma siguiente:

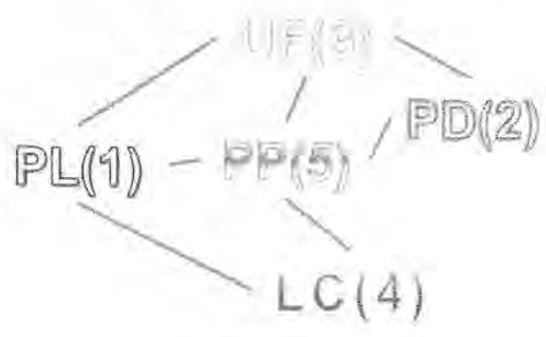

Ilustración 4

En el grafo se representan las coaliciones que cada partido esta dispuesto a realizar con el resto de partidos. También existe la posibilidad de que por ejemplo 4 y 2 formen una coalición siempre y cuando este presente 5. El partido 5 es de alguna forma un mediador entre 4 y 2 que les permite estar juntos cuando no sería así en otro caso.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los partidos representadas en este gráfico las condiciones iniciales del problema cambian. Por ejemplo si comparamos los swings de 5 en ambas situaciones vemos cómo no son iguales:

Significado - Swings de 5:

$$\mu_5(v) = \{1,4,5\}, \{2,3,5\}$$

$$\mu'_5(v) = \{1,4,5\},\{2,3,5\},\{1,2,5\},\{1,2,4,5\},\{2,3,4,5\}$$

Entonces, los nuevos resultados que obtendríamos son:

$$\Im(J,v) = (0.36, 0.116, 0.283, 0.03, 0.2)$$

$$\mu_i(J,v) = (6,4,5,1,5) \to \bar{\mu}(v) = 21$$

$$\beta_i(J,v) = (0.285, 0.19, 0.238, 0.047, 0.238)$$

$$Bz_i(J,v) = (0.187, 0.125, 0.156, 0.031, 0.156)$$

Se observa cómo si comparamos los resultados, 3 y 5 han ganado bastante poder, mientras que 2 y 4 han pérdido poder en el parlamento. Esto se debe a que los partido 3 y 5 son ahora importantes para la formación de diferentes coaliciones que no se formarían sin su presencia porque el resto de partidos de esa coalición no llegana acuerdos si no estan presentes 3 o 5, es decir 3 y 5 han ganado importancia y por tanto poder según las relaciones establecidas. Por el contrario 2 y 4 pierden poder por la misma razón pero en este caso al contrario. Estas coaliciones son menos importantes para formar nuevas coaliciones, más bien es al revés, son otros partidos los necesarios en sus coaliciones para que se puedan formar.

6. Conclusiones

La teoría de juegos es en la actualidad la parte de las matemáticas más utilizada en estudios prácticos de otras áreas prácticas de la vida. Su uso es, en estos momentos, indispensable en la economía o en la política, como una vía de mejorar el desarrollo de ambas. El segundo ejemplo expuesto puede trasladarse al parlamento europeo para que cada partido conozca sus posibilidades y su poder ante una votación, y decidir cual es la mejor opción. También nos permite conocer el mejor reparto de beneficios o costes, en función de la ocasión, y que cada empresa reciba o pague lo que le corresponde según su mayor o menor implicación en el negocio en cuestión. Además si ampliamos el campo de actuación más allá de la teoría de juegos cooperativos, encontramos aplicaciones de esta área en las ciencias sociales, en la ingeniería... Sus posibilidades son prácticamente infinitas y sus resultados relevantes respecto de la realidad y de mucha utilidad. Así habrá numerosas ampliaciones de esta monografía ya sea en la propia teoría de juegos cooperativos como conceptos de solución más complejos y que añaden más variables a los juegos, o investigar fuera de la cooperación los juegos estáticos o dinámicos mediante conceptos más conocidos como el equilibrio de Nash o la teoría de decisión. La juventud de esta rama de las matemáticas nos abre también la posibilidad de explorar e investigar conceptos totalmente nuevos, y en los que de hecho muchos investigadores se encuentran estudiando en estos momentos para mejorar las soluciones introduciendo más variables que hagan la solución más relevante.

Una de las razones más importante para entender las numerosas posibilidades y aplicaciones que nos proporciona la teoría de juegos es lo razonable de sus soluciones al problema planteado. Es decir, aunque apliquemos el método matemático, se introducen en las soluciones propiedades lógicas y comprensibles para cualquier persona sin apenas conocimientos matemáticos, como que no colaboraré con otro jugador si ganaré menos que trabajando yo solo. Así pues aunque luego a estas propiedades se les de un carácter matemático, las propiedades en sí son fácilmente comprensibles para cualquiera.

Yo no conocía prácticamente nada sobre teoría de juegos antes de realizar la investigación, y adquirí un rápido conocimiento del tema en unas semanas de forma relativamente sencilla que me permitió realizar este estudio. Es una materia sencilla de explicar y entender, al menos sus conceptos más primitivos.

[illegible] más aportes [illegible] explicación [illegible]

Con la teoría expuesta se pueden hacer, como pretendía en mi problema de investigación, variadas modelizaciones matemáticas de infinidad de situaciones de la vida cotidiana, extrayendo soluciones concluyentes que nos permitan tomar la mejor decisión de forma sencilla.

Es, sin duda, este aspecto el que más interés despertó en mi y que me ha resultado más impresionante tras realizar la monografía. Como aprendemos en Teoría del conocimiento cada área tiene un marco propio con su método, lenguaje, parte de la realidad que estudian... Las matemáticas estudian un mundo "inventado" y teórico donde existen unos axiomas establecidos que lo definen. La teoría de juegos se sale de este mundo imaginario para recurrir a la realidad de donde toma los axiomas iniciales del problema y a partir de esto construye su estudio. De alguna forma es un método de "humanizar" las matemáticas o mejor dicho de matematizar la realidad como han intentado hacer numerosos filósofos racionalistas como el matemático Descartes.

7. Referencias bibliográficas

Referencias escritas:

- *Cerdá, Emilio; Pérez, Joaquín; Jimeno, José Luis: Teoría de juegos.*
- *González-Díaz, Julio; García-Jurado, Ignacio; Fiestras-Janeiro, M.Gloria; An Introductory Course on Mathematical Game Theory.*
- *Sánchez Rodríguez, Estela; Vidal Puga, Juan; Juegos Coalicionales; Universidad de Vigo.*

Referencias electrónicas:

- *Algaba, E. ; Bilbao, J.M. ; Fernández García, J.R. ; López, J.J.; El Índice de poder de Banzhaf en la Unión Europea ampliada; Universidad de Sevilla.*

  (http://www.esi2.us.es/~mbilbao/pdffiles/eupower.pdf)

- *Meijide, José Mª Alonso; Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos.*

  (http://eio.usc.es/pub/io/xogos/MATERIALES/ThesisPepe.pdf)

La mayoría de las definiciones teóricas, así como el resto de información ha sido obtenida de estas referencias. Agradecimientos a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros (Universidad de Sevilla) por facilitarme las fuentes escritas durante el desarrollo de la investigación.

Agradecimientos al Profesor Don Andrés Jiménez Losada, de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Sevilla, por la idea sugerida y el apoyo prestado. Además de mostrarme este nuevo mundo que es la teoría de juegos para mi y que él tanto disfruta enseñando e investigando.